

## **PUSHOVER MULTIMODAL EN ESTRUCTURAS CON DISIPADORES DE ENERGÍA ADAS O TADAS**

### **MULTIMODAL PUSHOVER ON STRUCTURES WITH ADAS OR TADAS ENERGY DISSIPATORS**

**David Mora**

Post Grado en Estructuras  
Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador

**Roberto Aguiar**

Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción  
Universidad de Fuerzas Armadas ESPE  
Av. Gral. Rumiñahui s/n, Sangolquí. Quito, Ecuador  
Correo Electrónico: [rraguiar@espe.edu.ec](mailto:rraguiar@espe.edu.ec)

### **RESUMEN**

El principal objetivo de este artículo es presentar la forma de cálculo de la curva de capacidad sísmica resistente, que relaciona el cortante basal con el desplazamiento lateral máximo, en una estructura con disipadores de energía por fluencia del material, tipo ADAS o TADAS, modelados como un elemento más del pórtico, empleando la técnica del Pushover multimodal.

La matriz de rigidez de los elementos de la estructura, se hallan por el método de las dovelas, considerando para los disipadores 5 dovelas y para los restantes elementos 3 dovelas, se indica con detalle la forma de cálculo de esta matriz y del modelo constitutivo bilineal que se considera.

Se analizan dos estructuras, una de hormigón de 4 pisos y otra de acero de 6 pisos, en cada una de ellas se considera que tiene disipadores ADAS por un lado y TADAS por otro, de tal manera que se obtienen curvas de capacidad sísmica para 4 casos.

Se indican las curvas de capacidad que se hallan en cada modo de vibración y la resultante que se halla al aplicar el criterio de la combinación cuadrática completa CQC. La curva resultante se compara con la que se obtiene con un Pushover monotónico en que se trabaja con el primer modo de vibración.

**Palabras claves:** Pushover monotónico; Pushover multimodal; disipadores ADAS; disipadores TADAS.

### **ABSTRACT**

The main objective of this article is to present the calculation method of the seismic resistant capacity curve, which relates the base shear with maximum lateral displacement in a structure with energy dissipation by yielding of the material, type ADAS or TADAS, modeled as an element of the frame, using the technique of multimodal Pushover.

Recibido: Febrero de 2015  
Aceptado: Julio de 2015

The stiffness matrix elements of the structure, is found by the method of segments, considering for the dissipators five segments and for the remaining elements 3 segments, is indicated in detail how this matrix and the bilinear constitutive model considered are calculated.

Two structures are considered, one of concrete with 4 floors and other of steel with 6 floors, each one of them are considered to have ADAS and TADAS dissipators, so seismic capability curves are obtained for 4 cases.

Capacity curves that are in each vibration mode are found and the resultant which is found applying the criterion of complete quadratic combination CQC. The resultant curve is compared to that obtained with a monotonic Pushover when working with the first vibration mode.

**Keywords:** Monotonic Pushover; Multimodal Pushover; *ADAS or TADAS Energy Dissipators*.

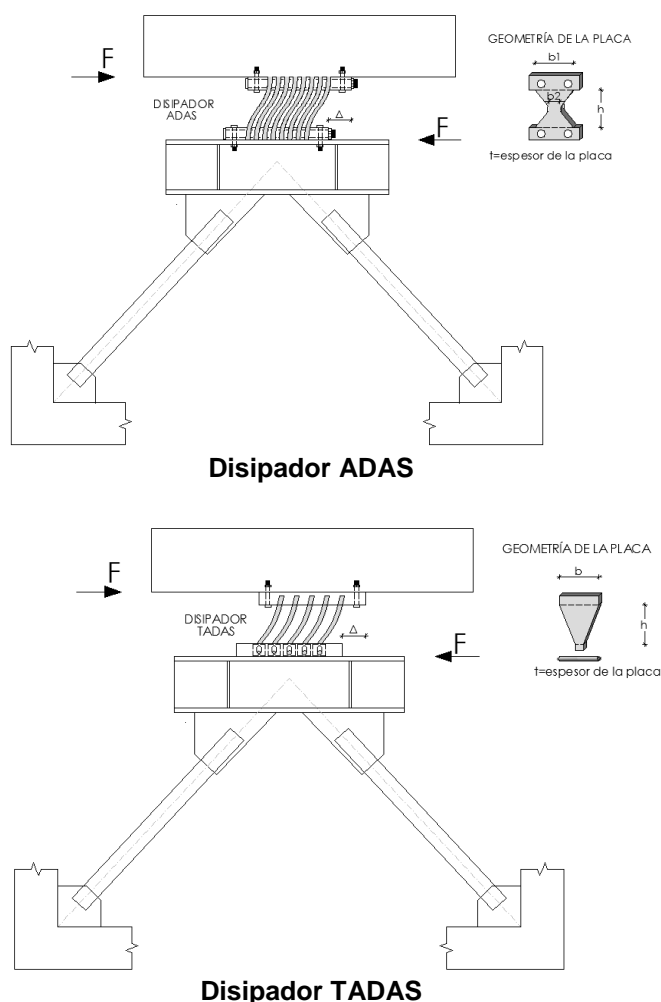
## 1 INTRODUCCION

Hay dos temas que se abordan en el presente artículo, el primero de ellos tiene que ver con el uso de disipadores de energía por fluencia del material denominados ADAS y TADAS, colocados sobre diagonales de acero en forma de "V" invertida; con estos dispositivos de control pasivo, se aumenta la rigidez de la estructura y lo principal se le confiere amortiguamiento a la misma. (Aguiar *et al.* 2015,1; Tsai *et al.* 1993, Wittaker *et al.* 1989).

En la parte superior de la figura 1, se observa un disipador ADAS, que tiene la forma de un reloj del tiempo, con un ancho  $b_1$  en la parte superior;  $b_2$  en la parte más angosta; tiene una altura  $h$ ; el espesor de cada placa es  $t$ ; y está compuesto por  $n$  placas, generalmente de acero, aunque últimamente se están trabajando con placas de cobre, aluminio y zing, que tienen más ductilidad que el acero. Heresi (2012).

En la parte inferior de la figura 1, se muestra un disipador TADAS que tiene la forma de un triángulo con un ancho  $b$  en la parte superior; altura  $h$ ; espesor de placa  $t$ ; ancho de placa en la parte inferior  $b_i$ ; número de placas  $n$ .

El comportamiento de histéresis de los disipadores ADAS y TADAS es de tipo bilineal. Normalmente se han colocado sobre diagonales de acero en forma de "V" invertida; de tal manera que durante un sismo, una de las diagonales trabaja a tracción y la otra trabaja a compresión. A tracción tiene mejor comportamiento el acero que a compresión; en Aguiar *et al.* (2015,2) se ilustra el cálculo del diagrama de histéresis fuerza-desplazamiento, de tipo bilineal, que tienen las diagonales de acero.



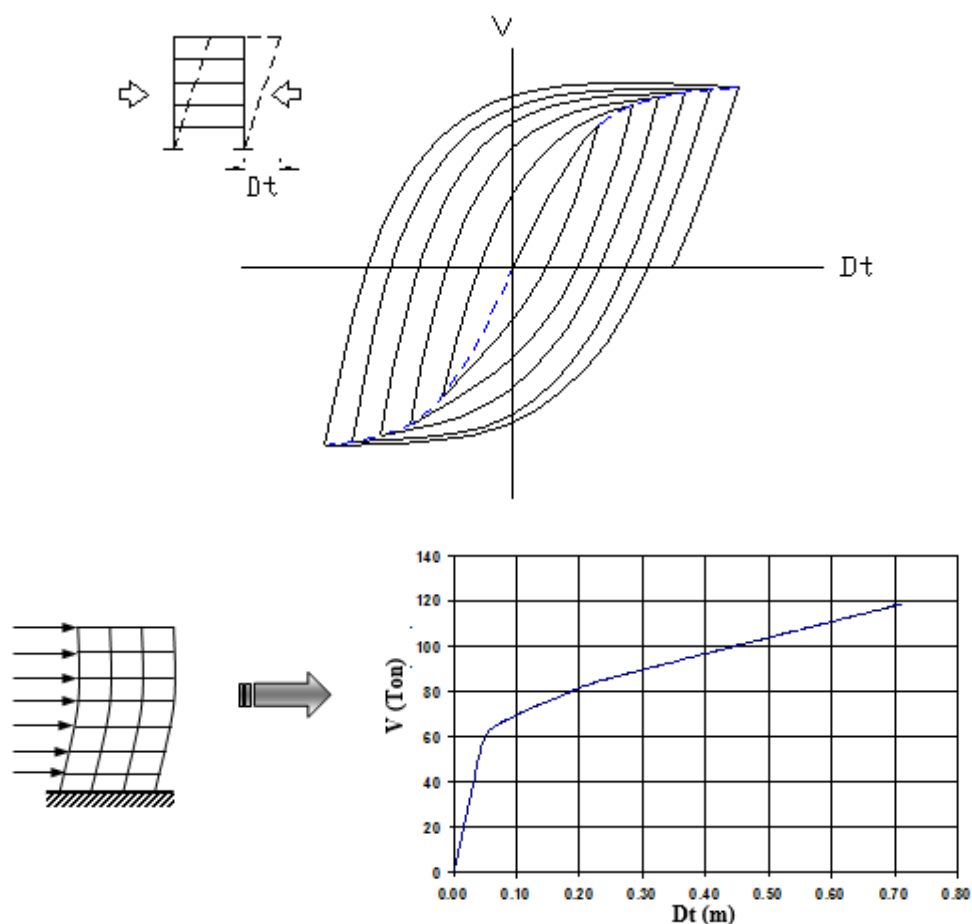
**Figura 1** Disipadores de energía por fluencia el material: ADAS y TADAS

La geometría de los disipadores ADAS y TADAS, garantiza que cuando ingresan al rango no lineal, toda la sección se va a plastificar porque su curvatura es constante; en el caso de los ADAS se tiene doble curvatura, por su forma; y en el caso de los TADAS, simple curvatura. Nuevamente en Aguiar *et al.* (2015,2) se ilustra la forma de cálculo del diagrama momento-curvatura de estos dispositivos mediante un modelo bilineal.

En la figura 1, se aprecia que para los dos disipadores existe un corrimiento relativo  $\Delta$  entre el borde superior y el borde inferior. Este desplazamiento es el que da origen a la liberación de energía durante un sismo y por ende a incrementar el amortiguamiento.

El otro tema que se aborda, en el artículo, tiene que ver con la obtención de la curva de capacidad sísmica resistente, que relaciona el cortante basal,  $V$ , con el desplazamiento lateral máximo,  $D_t$ , mediante la Técnica del Pushover. Es

básico conocer esta curva para poder saber el comportamiento que tendrá la estructura durante un sismo.



**Figura 2** Ilustración de la obtención de la curva de capacidad sísmica resistente aplicando la Técnica del Pushover. Fuente: Aguiar (2002)

En la parte superior de la figura 2 se observa el comportamiento no lineal de una estructura sometida a cargas cíclicas, y en la parte inferior se observa que la curva de capacidad sísmica resistente que se halla al aplicar la Técnica del Pushover es muy aproximada a la que se halla en la curva de la envolvente de la gráfica superior.

Esta semejanza fue la que motivó a trabajar en el tema del Pushover que no es más que la aplicación de cargas laterales hasta llevar a la estructura a un punto que se considera el colapso de la estructura.

En los primeros trabajos, la aplicación de la carga lateral se la hizo en función del primer modo de vibración, lo cual es bastante bueno para estructuras regulares, razón por la cual fue muy criticado este procedimiento por algunos investigadores entre ellos Chopra y Goel (2001, 2002) quienes propusieron

trabajar con todos los modos de vibración en lugar de solo hacerlo con el primer modo y es el tema que se desarrolla en este artículo.

## 2 MODELAJE DE ELEMENTOS

### 2.1 Elemento disipador

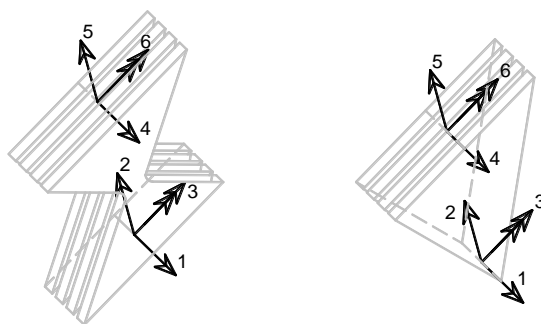
Existen soluciones analíticas, propuestas por Whitaker *et al.* (1987), Tena (1997) para encontrar la matriz de rigidez del elemento disipador sea éste TADAS o ADAS pero en éste artículo se prefiere calcular la matriz de rigidez, dividiendo al elemento en 5 dovelas, las mismas que se indican en la figura 3.



**Figura 3** Dovelas consideradas en elementos disipador.

Cada una de las dovelas es de sección constante, cuya base está indicada en la figura 3 y la altura de la sección transversal es el espesor  $t$ , estrictamente es  $nt$ , siendo  $n$  el número de placas, y la longitud es  $h/5$ . Al ser de sección constante es directo el cálculo de la matriz de rigidez de cada dovela en coordenadas globales. Mora y Aguiar (2015).

La numeración de los grados de libertad se inicia en el borde inferior del disipador, luego se continúa en el borde superior del disipador y posteriormente en los puntos de contacto de las placas. En total se tienen 18 grados de libertad; se halla la matriz de rigidez por ensamblaje directo y se condensa a las coordenadas de los extremos las mismas que están indicadas en la figura 4, estas son las coordenadas globales del elemento disipador.



**Figura 4** Coordenadas globales del elemento disipador.

Al ser las dimensiones del elemento disipador muy pequeñas, no es importante considerar el efecto de corte  $\phi$ . Para el modelo constitutivo bilineal se trabaja con la dovela superior que tiene un ancho  $b$  y una altura de la sección transversal igual a:  $n t$ . En esta dovela se tiene que el momento de inercia  $I$ , el eje neutro  $c$ , el momento plástico  $z$ , y el momento de fluencia  $M_Y$ , valen:

$$I = \frac{b (n t)^3}{12} \quad c = \frac{n t}{2} \quad (1) \text{ y } (2)$$

$$z = \frac{b (n t)^2}{4} \quad M_Y = z * f_y \quad (3) \text{ y } (4)$$

La variable todavía no definida es el límite de fluencia del material  $f_y$ . Para hallar la curvatura de fluencia se la obtiene con la siguiente ecuación.

$$\phi_Y = \frac{M_Y}{E * I} \quad (5)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material. La curvatura última  $\phi_U$  se halla en función de la ductilidad por curvatura  $\mu_\phi$ . Finalmente el momento último  $M_U$  se determina en función de  $\alpha$  que es la relación entre la rigidez post fluencia, con respecto a la rigidez elástica.

$$\phi_U = \mu_\phi \phi_Y \quad M_U = M_Y + \alpha E I (\phi_U - \phi_Y) \quad (6) \text{ y } (7)$$

En la figura 5 se presenta el diagrama momento-curvatura para el elemento disipador, para los dos casos en que va a trabajar y son: la parte inferior trabaja a tracción y la superior a compresión y viceversa.

Por ser la curvatura uniforme, en los disipadores se considera que el diagrama momento curvatura encontrado, rige para todas las dovelas.

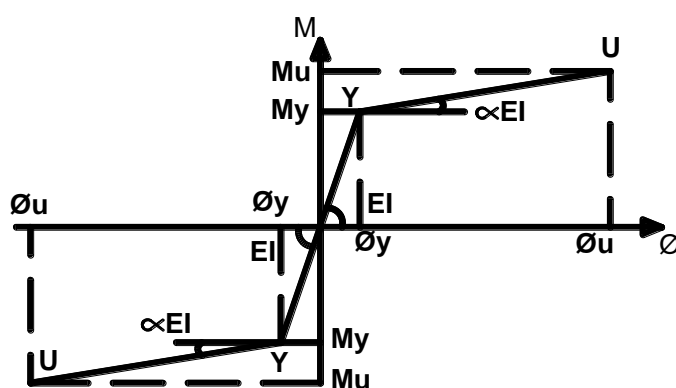


Figura 5 Diagrama momento-curvatura para elemento disipador

## 2.2 Elemento diagonal

La diagonal de acero del contraviento, trabaja axialmente, de tal manera que la matriz de rigidez del elemento es de 4 por 4. (Aguiar 2014). Para el comportamiento no lineal, se tienen dos posibilidades, la una que la diagonal trabaje a compresión, en este caso se trabaja con el modelo constitutivo indicado en la figura 6 y la otra posibilidad es que la diagonal trabaje a tracción, con el modelo que se encuentra en la figura 7.

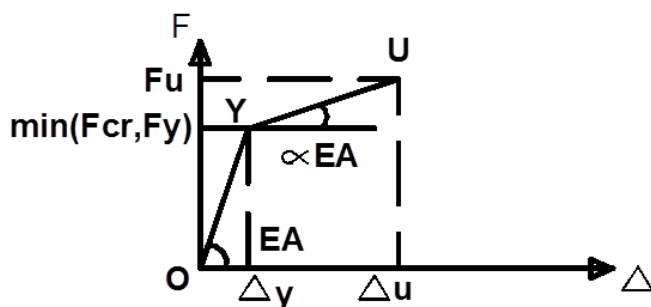
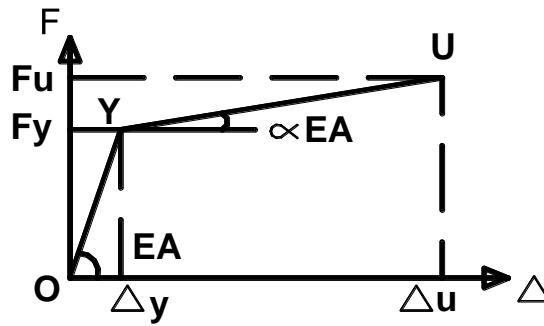


Figura 6 Modelo bilineal para elemento diagonal, trabajando a compresión.

La diferencia entre estos dos modelos es la forma como se obtiene el punto de fluencia, para cuando la diagonal trabaja a compresión, la fuerza del punto de fluencia es el menor valor entre  $F_Y$  y  $F_{Cr}$ .

$$F_Y = A * f_y \quad (8)$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal de la diagonal;  $F_{CL}$  es la fuerza crítica de pandeo, de acuerdo al ASCE 41 (2011), para perfiles tubulares, se debe encontrar primero la relación entre la longitud del elemento  $L$ , y el radio de giro  $r$ .



**Figura 7** Modelo bilineal para elemento diagonal, trabajando a tracción.

$$\frac{L}{r} \leq 108 \quad (9)$$

Si se cumple la relación  $f_{cr} = 12 \text{ psi}$ ; caso contrario se obtiene  $f_{cr}$  con la siguiente expresión.

$$f_{cr} = \frac{1.4 * 10^5}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (\text{psi}) \quad (10)$$

Para pasar de (psi) a  $(\text{T/m}^2)$  se debe multiplicar por 703.069. Finalmente, la carga crítica de pandeo se halla con la siguiente ecuación.

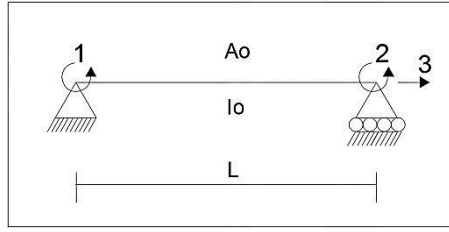
$$F_{cr} = A f_{cr} \quad (11)$$

Para el caso de tracción la fuerza de fluencia es simplemente  $F_Y$ . Para hallar el desplazamiento de fluencia,  $\Delta_Y$  tanto a compresión como tracción se divide la fuerza de fluencia para la rigidez axial  $EA$ . El desplazamiento último,  $\Delta_U$  es igual a la ductilidad por el desplazamiento de fluencia; finalmente la fuerza última,  $F_U$  se halla en función de  $\alpha$  pero esta vez relaciona la rigidez axial post fluencia con respecto a la rigidez axial elástica.

## 2.3 Elemento viga o columna

En la figura 1, se muestra el modelo básico denominado sistema 1, a partir del cual se halla la matriz de rigidez del elemento, en coordenadas locales (sistema 2) y globales (sistema 3). Este sistema básico es el que se va a utilizar y se lo presenta a continuación primero para cuando el elemento trabaja en el rango elástico y posteriormente cuando ingresa al rango no lineal. Para los dos casos se puede o no considerar el efecto de corte  $\phi$ .





**Figura 8** Sistema de coordenadas 1, en que no se consideran desplazamientos como cuerpo rígido.

### 2.3.1 Rango elástico

En la figura 8 se ha denominado  $A_0, I_0$ , al área e inercia en el centro de luz, que es igual a la del nudo inicial y final, para el caso de elementos de sección constantes. En general para el rango elástico sea  $A, I$  el área y la inercia a flexión. La matriz de rigidez, para el sistema de coordenadas 1, es la siguiente. Aguiar (2012, 2014).

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L} \frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L} \frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L} \frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Todas las variables han sido ya definidas, restando indicar la ecuación con la cual se halla el efecto de corte  $\phi$

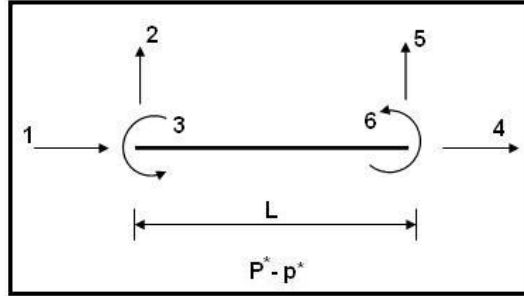
$$\phi = \frac{3 \beta E I}{G A L^2} \quad (13)$$

Donde  $G$  es el módulo de corte;  $\beta$  es el factor que mide el efecto de corte, para elementos de sección constante vale 1.2.

La matriz de paso del sistema 1 al sistema 2 (coordenadas locales) es  $T_{1-2}$  y la matriz de rigidez en el sistema 2 (figura 9) se denomina  $k_2$  y se halla con la siguiente ecuación matricial.

$$k_2 = T_{1-2}^t k_1 T_{1-2} \quad (14)$$

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$



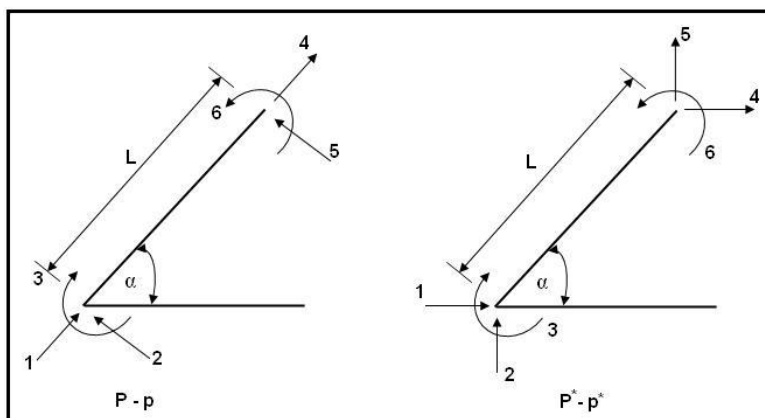
**Figura 9** Sistema 2. Coordenadas locales

Para pasar del sistema 2 al sistema 3 (coordenadas globales) se utiliza la matriz de rotación  $T_{2-3}$  y la matriz de rigidez en coordenadas globales  $k_3$  se halla con la siguiente ecuación pero antes en la figura 10 se indica el sistema 3.

$$k_3 = T_{2-3}^t k_2 T_{2-3} \quad (16)$$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

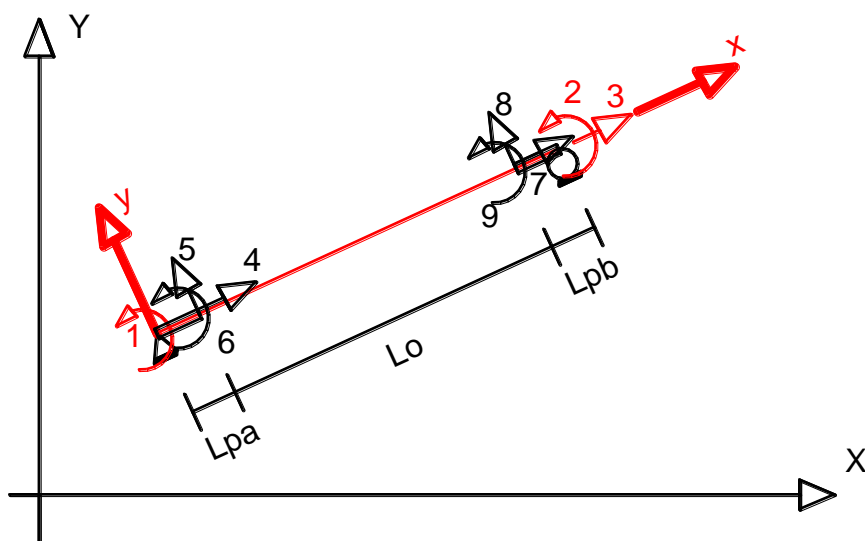
Donde  $\alpha$  es el ángulo que forma el eje del elemento con la horizontal, para vigas vale cero grados y para columnas 90 grados.



**Figura 10** Coordenadas locales y globales de un elemento.

### 2.3.2 Rango inelástico

En la figura 11 se presenta el modelo numérico de cálculo, para un elemento viga o columna, que trabaja en el rango no lineal, en el sistema de coordenadas 1. Sea  $L_{pa}$  la longitud plástica en el nudo inicial (El momento en el nudo inicial es mayor que el momento de fluencia  $M_Y$ ); sea  $L_{pb}$  la longitud plástica en el nudo final (El momento en el nudo final es mayor que el de fluencia  $M'_Y$ ) y  $L_0$  es la longitud sin daño. (Mora y Aguiar, 2015).



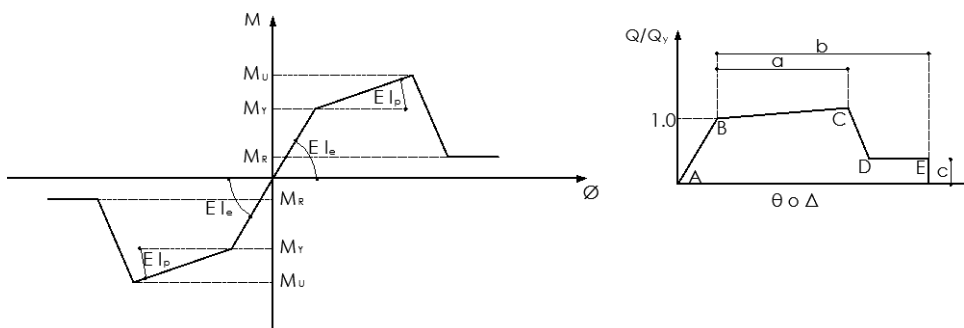
**Figura 11** Elemento en coordenadas de sistema reducido

El modelo de la figura 11, considera la longitud de daño, a diferencia de otros modelos de plasticidad concentrada, como el de Giberson (1968). En el modelo de la figura 11 se considera que el elemento está compuesto por tres sub

elementos, que tienen rigideces a flexión:  $EI_a, EI_0, EI_b$  y rigidez axial:  $EA_a, EA_0, EA_b$ ; el subíndice  $a$ , es para el sub elemento de longitud  $L_{pa}$ ; el subíndice 0 para el sub elemento de longitud  $L_{p0}$ ; y el subíndice  $b$  para el sub elemento de longitud  $L_{pb}$ . En cada sub elemento se halla la matriz de rigidez en coordenadas globales, en la forma indicada en el sub apartado 2.3.1, considerando o no el efecto de corte  $\emptyset$ .

Se ensambla la matriz de rigidez, teniendo en cuenta los grados de libertad indicados en la figura 11, de tal manera que se halla una matriz de 9/9 y se condensa esta matriz a las tres primeras coordenadas. (Mora y Aguiar, 2015). De esta manera se halla la matriz de rigidez para el sistema 1, pero considerando el comportamiento no lineal de los elementos. En Aguiar *et al.* (2015,3) se ilustra la forma de proceder a partir de este modelo, para cuatro condiciones: i) Todas las secciones se encuentran en el rango elástico; ii) Se forma la rótula plástica en el nudo inicial y en el final no; iii) se forma la rótula plástica en el nudo final y en el inicial no; iv) se forman rótulas plásticas en el inicial y final.

La relación momento-rotación de los elementos, se obtuvo a partir de los criterios y tablas, recomendadas por el ASCE 41 (2011) tanto para elementos de hormigón como para acero. En la figura 12 se presenta a la izquierda el diagrama momento curvatura con el cual se halla las rigideces a flexión y a la derecha se indica el diagrama momento-rotación. En Aguiar *et al.* (2015,2) está muy detallado la forma de encontrar: el momento de rotación en la fluencia; la longitud de la zonas plásticas; el cálculo del momento de fluencia con el modelo de Y. Park (1985) para hormigón armado; el cálculo del momento de fluencia para elementos de acero; la forma de pasar del diagrama momento rotación al diagrama momento curvatura.

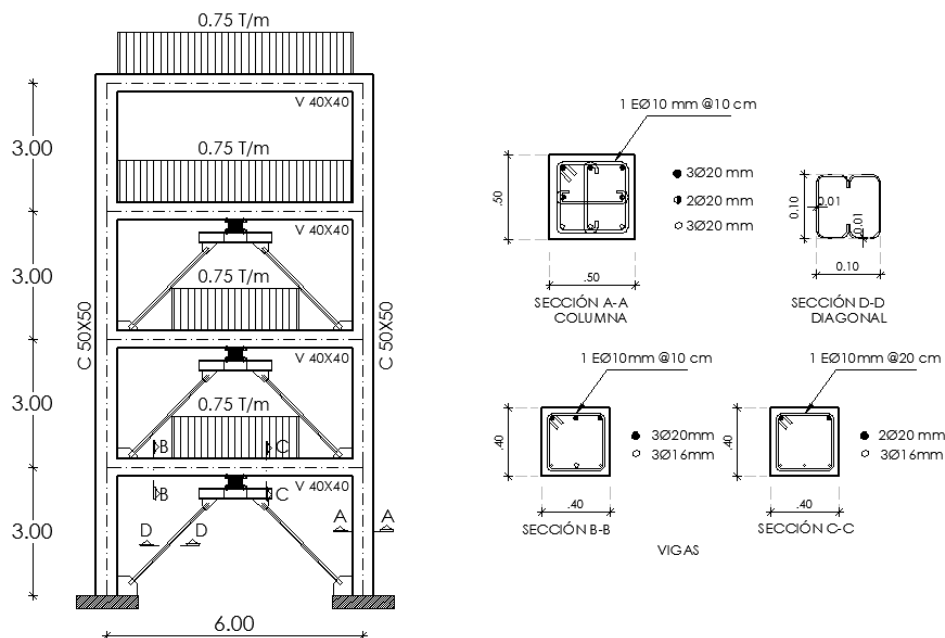


**Figura 12** Relación momento curvatura y momento rotación, con modelo ASCE 41

Un tema muy importante es la forma como se trabaja en la zona residual  $\overline{DE}$  donde el momento residual  $M_r = c M_y$ . El factor  $c$  recomienda el ASCE 41. De tal manera que en esa zona se ha superado el momento último, aquí la deformación del hormigón es mayor a 0.004, no se ha formado la rótula plástica pero la sección todavía tiene capacidad a flexión. En Mora y Aguiar (2015) está descrita la forma de trabajar en esta zona.

### 3 MATRICES DE RIGIDEZ, MASA Y PROPIEDADES DINÁMICAS

Posteriormente, se presentará la curva de capacidad sísmica resistente, mediante un pushover multimodal, de la estructura de 4 pisos de hormigón armado con disipadores de energía, indicada en las figuras 13 y 14. Pero en este apartado interesa ilustrar cual es el modelo de análisis, sus grados de libertad, las coordenadas principales y las coordenadas secundarias, esto se encuentra en la figura 15.

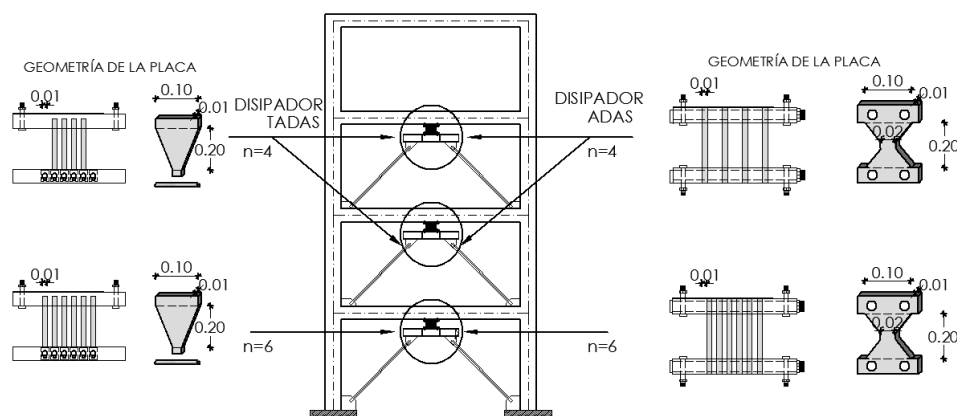


**Figura 13** Estructura de hormigón armado con disipadores de energía.

Es de interés conocer la matriz de rigidez y la matriz de masas, al inicio del pushover, así como sus períodos de vibración, modos de vibración y factor de participación modal. Pero a más de ello que se presente un programa que resuelva lo indicado, utilizando la librería de programas del sistema de computación **CEINCI-LAB**.

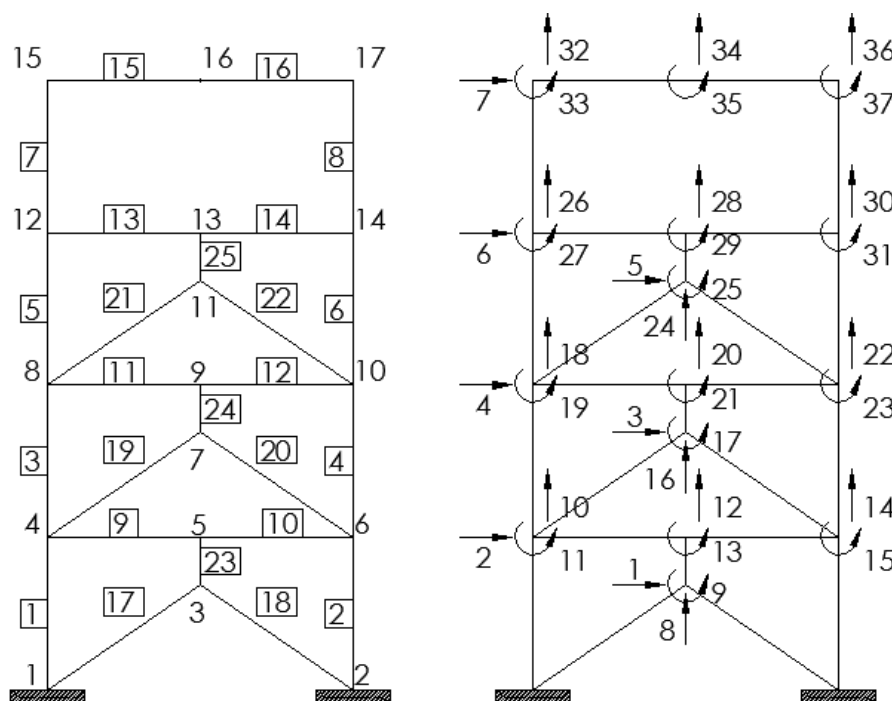
La curva de capacidad sísmica que se presentará posteriormente, considera dos casos: el primero que la estructura tiene disipadores de energía TADAS, los mismos que se indican a la izquierda de la figura 14 y el segundo que la estructura tiene los disipadores de energía ADAS que se indican a la derecha de la figura 14. El programa que se indica más adelante, en este apartado considera que la estructura tiene disipadores TADAS.

Nótese que el disipador de la primera planta, tiene 6 placas de acero y es diferente del disipador de la segunda y tercera planta, que tiene 4 placas de acero. El espesor de las placas es de 1 cm., cantidad con la que espera la plastificación de los disipadores.



**Figura 14** Disipadores de energía considerados en estructura de 4 pisos.

Se considera que el disipador es un elemento más de la estructura, al igual que cada una de las diagonales que conforman la "V" invertida. Para entender el programa es necesario conocer la numeración de los nudos y elementos, los mismos que se indican a la izquierda de la figura 15.



**Figura 15** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

A la derecha de la figura 15 se muestran los grados de libertad, primero se ha numerado las coordenadas principales de la 1 a la 7. Se destaca que el desplazamiento lateral 1, en el nudo formado por la unión de las diagonales y el

disipador, es diferente del desplazamiento lateral del primer piso que se ha denominado 2; precisamente esta diferencia de desplazamientos es la que origina la disipación de energía.

### 3.1 Matriz de rigidez

En la gráfica de la izquierda de la figura 15, se observa que primero se han numerado todos los elementos de hormigón armado, que van del 1 al 16. Luego las diagonales de acero que van del 17 al 22 y finalmente los disipadores del 23 al 25. Es importante numerar por separado para poder encontrar la matriz de rigidez de la siguiente forma.

$$KT = KH + KDIAG + KDIS \quad (18)$$

Donde  $KH$  es la contribución a la matriz de rigidez de los elementos de hormigón armado;  $KDIAG$  es la contribución de las diagonales de acero, de los montantes, a la matriz de rigidez y  $KDIS$  es la contribución de los elementos disipadores a la matriz de rigidez.

Las secciones de los elementos de hormigón armado se indican a la derecha de la figura 13; las columnas son de 50/50 y las vigas de 40/40; la armadura longitudinal y transversal de las columnas es la misma en todos los elementos; las vigas tienen un armado diferente en los apoyos y en el centro de luz pero en todos los pisos el refuerzo es el mismo.

Las diagonales de acero, están formadas por perfiles tubulares cuadrados de 100/100/10 mm., como se indica en la parte superior derecha de la figura 15 y como ya se indicó la geometría de los disipadores se halla en la figura 16.

Cada una de las contribuciones a la matriz de rigidez, de los diferentes materiales, se realiza por ensamblaje directo, trabajando con la matriz de rigidez de los elementos en coordenadas globales y con los vectores de colocación. Para el ejemplo la matriz de rigidez  $KT$  es de 37 por 37. Aguiar (2014).

Una vez que se halla la matriz de rigidez total, se condensa a las coordenadas principales. Cuando se numera primero las coordenadas principales hay solo dos formas para la condensación estática, la una que involucra el cálculo de una matriz inversa y la otra la solución de un sistema de ecuaciones.

En cambio cuando las coordenadas principales se numeran al último, hay tres formas de calcular la matriz de rigidez condensada, las dos primeras han sido ya indicadas en el párrafo anterior y la tercera, que es la óptima, realizando la triangularización de la matriz  $KT$  hasta la fila  $n - na$ . Siendo  $n$  el número total de grados de libertad y  $na$  el número de coordenadas principales (Aguiar 2012, 2014). Se denomina  $K$  a la matriz de rigidez en coordenadas principales; para el inicio del cálculo cuando trabaja la estructura en el rango elástico, esta matriz resulta.

Para estructura con disipadores ADAS:

$$KL = \begin{bmatrix} 17831.33 & -2197.03 & 15.79 & -83.76 & 14.85 & 14.73 & -1.38 \\ -2197.03 & 28447.70 & -14930.6 & -7477.99 & 690.11 & 2225.43 & -309.16 \\ 15.79 & -14930.6 & 15637.41 & -24.60 & -663.41 & -7.20 & -41.82 \\ -83.76 & -7477.99 & -24.60 & 24066.60 & -14262.4 & -6031.31 & 1604.47 \\ 14.85 & 690.11 & -663.41 & -14262.4 & 14972.19 & -658.52 & -107.33 \\ 14.73 & 2225.43 & -7.20 & -6031.31 & -658.52 & 8114.36 & -3171.48 \\ -1.38 & -309.16 & -41.82 & 1604.47 & -107.33 & -3171.48 & 1949.59 \end{bmatrix}$$

Para estructura con disipadores TADAS:

$$KL = \begin{bmatrix} 18895.17 & -3276.92 & 23.62 & -125.22 & 22.10 & 22.12 & -2.06 \\ -3276.92 & 29544.39 & -14929.1 & -7445.70 & 677.55 & 2222.90 & -308.30 \\ 23.62 & -14929.1 & 15979.36 & -369.39 & -656.22 & -20.56 & -39.80 \\ -125.22 & -7445.70 & -369.39 & 24415.80 & -14260.5 & -6027.47 & 1602.26 \\ 22.10 & 677.55 & -656.22 & -14260.5 & 15319.28 & -1002.87 & -114.59 \\ 22.12 & 2222.90 & -20.56 & -6027.47 & -1002.87 & 8456.41 & -3164.32 \\ -2.06 & -308.30 & -39.80 & 1602.26 & -114.59 & -3164.32 & 1949.75 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Matriz de masas

Sea  $m_1$  la masa del primer piso;  $m_2, m_3, m_4$ , son las masas de los pisos 2 a 4, las mismas que se calculan en base a las cargas indicadas en la figura 15. En este caso, todas las masas son iguales. La matriz de masas se obtiene evaluando la energía cinética de la estructura,  $T_c$

$$T_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (19)$$

Donde  $m$  es la masa;  $v$  es la velocidad lineal evaluada en el centro de masas;  $J$  es el momento de inercia de la masa evaluada en el centro de masas;  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular. (Aguiar 2012) En el modelo se desprecia  $J$  con lo que la matriz de masas en  $T \cdot s^2/m$  resulta.

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.918 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.918 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.918 \end{bmatrix}$$



### 3.3 Propiedades dinámicas

Nótese que la matriz de masas tiene ceros en la diagonal, por lo que interesa ver los períodos de vibración y los respectivos modos de vibración, los mismos que se indican en la tabla 1, destacando que los modos están normalizados de tal manera que en el tope de la estructura sea igual a 1.

**Tabla 1** Períodos y modos de vibración.

Para estructura con disipadores ADAS:

MODOS	1	2	3	4
PERIODOS	<b>0.40011</b>	<b>0.12959</b>	<b>0.06236</b>	<b>0.03996</b>
AUTOVECTORES	0.01860	-0.07846	0.28739	-0.63730
	0.14292	-0.60863	2.30969	-5.39975
	0.15936	-0.62855	2.23228	-4.93699
	0.43388	-1.17211	0.71059	5.28255
	0.45310	-1.13342	0.57772	4.91852
	0.73144	-0.55297	-2.23999	-3.44557
	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Para estructura con disipadores TADAS:

MODOS	1	2	3	4
PERIODOS	<b>0.36798</b>	<b>0.12465</b>	<b>0.06024</b>	<b>0.03898</b>
AUTOVECTORES	0.02493	-0.10536	0.43255	-0.98300
	0.13607	-0.57958	2.46521	-5.91250
	0.15839	-0.61264	2.34929	-5.18490
	0.41800	-1.16825	0.87740	5.66255
	0.44392	-1.12029	0.65868	5.08386
	0.71187	-0.60799	-2.39119	-3.59958
	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Los modos de vibración colocados son los pertenecientes a cuando la masa modal efectiva es igual al 100%, y este número de modos corresponderá a los pisos donde existe masa diferente de cero.

Finalmente, interesa conocer los factores de participación modal  $\Gamma^{(i)}$  debido a que se necesitan para explicar el pushover multimodal.

$$\Gamma^{(i)} = \frac{\phi^{(i)t} \mathbf{M} \mathbf{b}}{\phi^{(i)t} \mathbf{M} \phi^{(i)}} \quad (20)$$

Donde  $\phi^{(i)}$  es el modo de vibración  $i$ ;  $\mathbf{M}$  es la matriz de masas;  $\mathbf{b}$  es el vector de incidencia de las coordenadas principales con respecto al movimiento del suelo. Cuando se trabaja con coordenadas absolutas, como en este caso el vector  $\mathbf{b}$  es unitario y para el presente caso, está compuesta por 7 unos.

Los factores de participación indican que tanto participa el modo en la respuesta. En la tabla 2 se indican los factores de participación y se observa que el factor de participación del primer modo es el más importante y esto se refleja en la curva de capacidad sísmica resistente, como se verá más adelante.

**Tabla 2** Factores de participación modal.

Modo	Factor Participación ADAS	Factor de Participación TADAS
1	1.32371	1.33291
2	-0.43725	-0.44158
3	0.15021	0.14386
4	-0.03667	-0.03519

### 3.4 Programas de **CEINCI-LAB** que encuentran matriz de rigidez, masas y propiedades dinámicas.

A continuación se presentan los programas del sistema de computación **CEINCI-LAB** que obtienen exclusivamente la matriz de rigidez, matriz de masas y las propiedades dinámicas, que se ha presentado en este apartado.

**Tabla 3** Descripción de programas

Programa	Descripción
Geom	Determina las propiedades de las secciones, como el área, el momento de inercia, el momento de fluencia, la rigidez axial de fluencia y la rigidez de fluencia.
Structure_Geom_2D_v2	Programa que determina la geometría de la estructura, los grados de libertad, la matriz que contiene los vectores de colocación, la longitud, seno y coseno de los elementos.
espe_cap3	Programa que determina las propiedades dinámicas de la estructura como periodos, modos de vibración, factores de participación modal, masa modal efectiva, condensación de matriz de rigidez, etc.
Iteration_Vy	Sirve para determinar en forma exacta el punto de fluencia en una sección, cuando se pasa de la zona elástica a la plástica, regresa y disminuye el incremento de carga.
Dibujo_Din2	Con éste programa se tiene la opción de indicar cada cuantos ciclos de carga dibuja la estructura y coloque con colores en los elementos la zona del diagrama momento curvatura en que se halla. El color verde es para la zona post fluencia y el color rojo para la zona residual.
masas2	Encuentra la matriz de masas en el modelo

	en que se considera como un elemento al disipador. Las masas actúan en el piso pero al considerar un elemento al disipador, en la parte inferior no hay masa por lo que su valor es cero.
fuerzas_0	Encuentra las fuerzas en coordenadas locales, en cada ciclo de carga. Luego son almacenadas en la variable Tabla2.
Momento_Rotacion_ASCE41B	Si momento es positivo en vigas, $A_{sup}$ se encuentra en la parte superior y $A_{inf}$ en la parte inferior; caso contrario se invierte la armadura. Además llama a programas que determinan los parámetros de ASCE 41
Momento_Rotacion_ASCE41C	Similar al programa anterior pero para columnas, donde interviene la carga axial.
Momento_Rotacion_ConcrASCE41B	Determina los parámetros de ASCE 41 para el caso de vigas de hormigón armado.
Momento_Rotacion_ConcrASCE41C	Determina los parámetros de ASCE 41 para el caso de columnas de hormigón armado.
Momento_Rotacion_AceroASCE41B	Determina los parámetros de ASCE 41 para el caso de vigas de acero.
Momento_Rotacion_AceroASCE41C	Determina los parámetros de ASCE 41 para el caso de columnas de acero.
krigidez_ASCE41-2Mfi	Pasa de la relación momento-rotación a momento-curvatura y encuentra rigideces a flexión en nudo inicial, centro de luz y nudo final con las cuales halla la matriz de rigidez de elementos vigas y columnas usando el modelo incluido en K1_eqcorte4 (Mora y Aguiar (2015)) y el modelo de Giberson, luego ensambla la matriz de rigidez total de la estructura.
krigidez_braces_eq	Determina la rigidez axial equivalente de contraviento-disipador. Además puede calcular la rigidez axial solo de diagonales articuladas.
krigidez_damper2	Obtiene la rigidez de disipador con modelo 2 A y ensambla en la matriz de rigidez de la estructura.
krigidez_damper3	Similar al programa anterior pero con modelo 2 B.
PlasticHinge	Determina la longitud plástica.
AxialTADAS	Para el modelo bilineal fuerza-desplazamiento del elemento disipador TADAS identifica la rama en que se encuentra para la rigidez axial.
AxialADAS	Similar al anterior pero con disipador ADAS.

### 3.5 Programa desarrollado que obtiene matrices de rigidez, masa y propiedades dinámicas

- Programa en *Matlab* para hallar la Matriz de Rigidez de una estructura sin arriostrar:

#### *krigdez\_ASCE41\_2Mfi*

```
function
[SS, icon, iconu, iconc, Table3, K3, Hinge, tetay, TableMfi]=krigidez
_ASCE41_2Mfi (ngl, Table1, Table2, Table3, Table4, L, seno, coseno, VC
, icon, iconu, iconc, jj, Pa, pq, Q2cg, Hinge, tetay)

mbr=length(L); SS=zeros (ngl); TableMfi=zeros (mbr, 12);

K3=zeros (6, 6, mbr);

ST1=size (Table1, 2) / 3;

for i=1:mbr

if Table1 (i, 1) ~= 1.1 && Table1 (i, 1) ~= 1.2

    tetayi=tetay (i, 1); tetayj=tetay (i, 2);

    lon=L (i); sen=seno (i); cosen=coseno (i);

    tetai=abs (Table4 (i, 1)); tetaj=abs ((Table4 (i, 2)));

    Mi=-Table2 (i, 3); Mj=Table2 (i, 6);

    Vi=abs (Table2 (i, 2)); Vj=abs (Table2 (i, 5));

if (sen>=-.707106 && sen<=.707106)

    [ai, bi, ci, tetayi, EAa, EIya, Myi, pa]=Momento_Rotacion_ASCE41B (Ta
ble1 (i, 1:ST1), lon, Mi, tetai, tetayi, Vi);

    [~, ~, ~, ~, EAo, EIyo, ~]=Momento_Rotacion_ASCE41B (Table1 (i, ST1+1:
ST1*2), lon, 0, 0, 0, 0);

    [aj, bj, cj, tetayj, EAb, EIyb, Myj, pb]=Momento_Rotacion_ASCE41B (Ta
ble1 (i, ST1*2+1:ST1*3), lon, Mj, tetaj, tetayj, Vj);

else

    [ai, bi, ci, tetayi, EAa, EIya, Myi, pa]=Momento_Rotacion_ASCE41C (Ta
ble1 (i, 1:ST1), lon, Mi, Pa (i), tetai, tetayi, Vi);
```

```

[~,~,~,~,EAo,EIyo,~]=Momento_Rotacion_ASCE41C(Table1(i,ST1+1:
ST1*2),lon,0,Pa(i),0,0,0);

[aj,bj,cj,tetayj,EAb,EIyb,Myj,pb]=Momento_Rotacion_ASCE41C(Ta
ble1(i,ST1*2+1:ST1*3),lon,Mj,Pa(i),tetaj,tetayj,Vj);

end

tetay(i,:)=[tetayi,tetayj];
%-----
%i linear y j linear
    ELa=EIya;ELo=EIyo;ELb=EIyb;
%-----
Mreal=[Mi,Mj];

[Lpa,Lpb,beta_a,beta_o,beta_b]=PlasticHinge(Table1(i,:),lon,M
real,ELa,ELo,ELb,Myi,Myj);

    Lo=lon-Lpa-Lpb;

Mui=(ai/Lpa)*EIya*pa+Myi;

Muj=(aj/Lpb)*EIyb*pb+Myj;
%i nonlinear
    if abs(Mi)>=Myi

        ELa=pa*EIya;

        if Table3(i,1)==0

            icon=icon+1;

            Table3(i,7)=icon;Table3(i,1)=jj;

        end

    end

%i nonlinear
    if abs(Mj)>=Myj

        ELb=pb*EIyb;

        if Table3(i,2)==0

            icon=icon+1;

            Table3(i,8)=icon;Table3(i,2)=jj;

```

```

end

end

%-----
if (Table3(i,5)~=0 || Table3(i,6)~=0) || (tetai>tetayi+bi ||
tetaj>tetayj+bj)

    if tetai>tetayi+bi || Table3(i,5)~=0

        if Table3(i,5)==0,
            iconu=iconu+1;Table3(i,11)=iconu;Table3(i,5)=jj;
        end

        T12=[0    1/lon    0 0    -1/lon 1;
              -1     0    0 1     0 0];

        K1=[ (6*EIb*EIo) / (lon*(EIb+EIo))    0
              (EAa*EAb*EAo) / (EAa*EAb*Lo+EAa*EAo*Lpb+EAb*EAo*Lpa) ];

    end

    if tetaj>tetayj+bj || Table3(i,6)~=0

        if Table3(i,6)==0,
            iconu=iconu+1;Table3(i,12)=iconu;Table3(i,6)=jj;
        end

        T12=[0    1/lon    1 0    -1/lon 0;
              -1     0    0 1     0 0];

        K1=[ (6*EIa*EIo) / (lon*(EIa+EIo))    0
              (EAa*EAb*EAo) / (EAa*EAb*Lo+EAa*EAo*Lpb+EAb*EAo*Lpa) ];

    end

    if tetai>tetayi+bi && tetaj>tetayj+bj

        K1=(EAa*EAb*EAo) / (EAa*EAb*Lo+EAa*EAo*Lpb+EAb*EAo*Lpa);

        T12=[-1     0    0 1     0 0];
    end
end

```

```

end

else

    T12=[0    1/lon    1 0    -1/lon 0;
         0    1/lon    0 0    -1/lon 1;
        -1     0     0 1     0 0];

    [K1]=K1_eqcorte4(EIya,EIa,EIo,EIyb,EIb,EaA,EaA,EaO,EAb,EAb,max(lon/3-Lpa,0),Lpa,lon/3+min(lon/3-Lpa,0)+min(0,lon/3-Lpb),Lpb,max(0,lon/3-Lpb),beta_a);

end

%+++++
if (Mi>Mui && tetai<=tetayi+bi) || (Mj>Muj &&
tetaj<=tetayj+bj) || Table3(i,3)~=0 || Table3(i,4)~=0

%i rótula pl
    if Mi>Mui && tetai<=tetayi+bi || (Table3(i,3)~=0 &&
Table3(i,5)==0)

K1(1,1)=-(Q2cg(i,3)*lon-ci*Myi*lon)/(cosen*pq(2,i)-
cosen*pq(5,i)+lon*pq(3,i)-pq(1,i)*sen+pq(4,i)*sen);

K1(1,2)=0;K1(2,1)=0;

        if length(K1)==3

K1(2,2)=(6*EIb*EIo)/(lon*(EIb+EIo))*(1/2*(2+beta_o)/(1+2*beta_o));

        end

        if Table3(i,3)==0

            iconc=iconc+1;

            Table3(i,9)=iconc+1;Table3(i,3)=jj;

        end

end

%i rótula pl
    if Mj>Muj && tetaj<=tetayj+bj || (Table3(i,4)~=0 &&
Table3(i,6)==0) || (Table3(i,4)~=0 && Table3(i,6)==0)

        K1cMy=-(Q2cg(i,6)*lon-cj*Myj*lon)/(cosen*pq(2,i)-
cosen*pq(5,i)+lon*pq(6,i)-pq(1,i)*sen+pq(4,i)*sen);

```

```

K1(1,2)=0;K1(2,1)=0;

    if length(K1)==3

K1(1,1)=(6*EIa*EIo)/(lon*(EIa+EIo))*(1/2*(2+beta_o)/(1+2*beta_o));

        K1(2,2)=K1cMy;

    else

        K1(1,1)=K1cMy;
    end

    if Table3(i,4)==0

        iconc=iconc+1;

        Table3(i,10)=iconc+1;Table3(i,4)=jj;

    end
end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K2=T12'*K1*T12;
T23= [cosen sen 0 0 0 0
      -sen cosen 0 0 0 0
        0 0 1 0 0 0
        0 0 0 cosen sen 0
        0 0 0 -sen cosen 0
        0 0 0 0 0 1];

K3(:, :, i)=T23'*K2*T23;

for j=1:6

    J=VC(i,j);

    if J==0
        continue
    end

    for m=1:6

        mm=VC(i,m);

        if mm==0

```



```

        continue

    end

    SS(J,mm)=SS(J,mm)+K3(j,m,i);

end
end

fiyi=Myi/EIya;fiyj=Myj/EIyb;fiui=(Mui-
Myi)/pa/EIya+fiyi;fiuj=(Muj-Myj)/pb/EIyb+fiyj;

if jj==1

fiui=min(10*fiyi,(Mui-
Myi)/pa/EIya+fiyi);fiuj=min(10*fiyi,(Muj-Myj)/pb/EIyb+fiyj);
Mui=min(Mui,(fiui-fiyi)*pa*EIya+Myi);Muj=min(Muj,(fiuj-
fiyj)*pb*EIyb+Myj);

End

TableMfi(i,:)=[0,fiyi,fiui,0,Myi,Mui,0,fiyj,fiuj,0,Myj,Muj];

end

end

```

- Programa en *Matlab* para obtener la Matriz de Masas:

#### ***masas2***

```

function [Mt,M]=masas2(Fm,NI,NJ,Y,L,np)

M=zeros(np);

Niv=unique([Y(NI),Y(NJ)]);

for oo=1:np

    for mm=1:size(Fm,1)

        if Y(NI(Fm(mm,1)))==Niv(oo+1)

            M(oo,oo)=M(oo,oo)+L(Fm(mm,1))*abs(Fm(mm,2))/9.8;

        end

    end

end

end

```

```
Mt=sum ( sum (M) ) ;
```

- Programa en *Matlab* para obtener propiedades dinámicas:

### **espe\_cap3**

```
function
[FI,T,gama,alfa,OM,KL]=espe_cap3(K,M,Mt,np,ngl,nmodos)

kaa=K(1:np,1:np);kab=K(1:np,np+1:ngl);kbb=K(np+1:ngl,np+1:ngl);kba=kab';

KL=kaa-kab*kbb^-1*kba;

[T,FI,OM]=orden_eig(KL,M);

gama=zeros(nmodos,1);alfa=gama;

FI=FI./ repmat(FI(np,:),np,1); % Vibration Modes normalized to 1 on the 1st floor

J=ones(np,1);

for i=1:min(size(FI,2),nmodos)

    fi_n=FI(:,i);

    Ln=(fi_n'*M*J);Mn=(fi_n'*M*fi_n);

    gama(i)=Ln/Mn; %gama=Ln/Mn Factor de participacion modal

    alfa(i)=(fi_n'*M*J)^2/(Mt*(fi_n'*M*fi_n)); %alfa=Mn_a/Mt;
    sn=gama*M*fi_n

end
```

## **4 PUSHOVER MULTIMODAL**

En los primeros trabajos del Pushover se remontan a la década de los años setenta y ochenta del siglo pasado, las cargas laterales se aplicaban en forma monotónica en cada piso de la estructura, las mismas que eran obtenidas en base al primer modo de vibración (Freeman, 1975; Freman *et al.* 1978). Por esos tiempos el desarrollo informático era incipiente por lo que una buena parte de los Proyectistas estructurales o los investigadores no le dieron mayor importancia al asunto.

Con el gran desarrollo informático que se tiene en la última década del siglo XX, los investigadores empiezan a estudiar lo publicado y empiezan a cuestionar el Pushover se dan cuenta que en estructuras irregulares el aplicar cargas laterales en función del primer modo de vibración no es adecuado y recomiendan que se o haga en base a todos los modos de vibración. Chopra y Goel (1999, 2001, 2002)

Es así como nació el Pushover multimodal que se presenta en este artículo, destacando que actualmente se está trabajando con el Análisis Incremental Dinámico IDA, en el cual las fuerzas laterales que se aplican a la estructura pueden ser proporcionales a la forma espectral del primer modo, como lo recomienda el ASCE 7-05. (Vielma y Cando, 2014; Vielma 2015). Con esta pequeña introducción se indica a continuación el Pushover multimodal.

En un análisis modal se incrementa el cortante basal en cada ciclo de carga y este se lo reparte para cada modo de vibración usando una distribución de fuerzas laterales  $s_n^* = m \phi_i$ , como se indica en Chopra (2014), siendo  $m$  la masa de cada piso,  $\phi_i$  es el modo de vibración  $i$ .

Luego la repartición de la carga lateral por piso se la hace de acuerdo a la participación modal  $\Gamma_i$  ya indicada en el apartado anterior, donde  $i$  representa el modo de vibración.

Entonces, se obtiene un vector de cargas laterales para cada ciclo y para cada modo de vibración igual a:

$$Qa_n = \frac{diag(M) \cdot \phi_n}{\sum_{i=1}^n pisos (diag(M)_i \cdot \phi_{ni})} * \Gamma_n * \Delta V \quad (21)$$

Dónde:  $diag(M)$  es el vector de la diagonal de la matriz de masas de la estructura (si la matriz es diagonal);  $\phi_i$  es el modo de vibración  $i$ ;  $\Gamma_i$  es el factor de participación modal;  $\Delta V$  es el incremento del cortante basal.

Es conveniente que el valor  $\Delta V$  sea pequeño pero va a demandar mucho de tiempo de ejecución y se debe tener presente que los programas realizan un ajuste cuando se pasa del rango elástico al inelástico, ajuste que consiste en regresar al ciclo de carga anterior y reducir el incremento de carga hasta llegar al punto en que se pasa al rango no lineal.

#### 4.1 Criterio de combinación modal CQC

Si se realiza un análisis paso a paso de historia en el tiempo y separamos los resultados obtenidos para cada modo de vibración de la estructura se podrá observar que en el transcurso de la respuesta de las estructuras ante un acelerograma habrá picos absolutos máximos en diferentes sitios, esto hace algo difícil combinar exactamente los resultados ya que un análisis pushover representa el pico absoluto máximo de respuesta de un análisis dinámico en historia en el tiempo.

En Aguiar (2012) se presenta unos diez criterios de combinación modal lo que demuestra que el tema es bastante complejo. De estos criterios, el más utilizado y acogido en algunas normativas sísmicas es el CQC (Complete Quadratic Combination, Chopra, 2001), en que toma en cuenta la posibilidad de acoplamiento entre los modos.

El CQC realiza una combinación de suma de cuadrados más un término que combina las respuestas con un factor que dependerá de la frecuencia y factor de amortiguamiento de cada modo de vibración, este término puede ser positivo o negativo. Se presenta a continuación las fórmulas utilizadas para combinar las respuestas  $r$  con el criterio CQC:

$$r^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} r_i r_j \quad (22)$$

Lo que es igual a escribirla de la siguiente forma, la cual resume lo descrito en el párrafo anterior:

$$r = \left( \sum_{j=1}^N r_n^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} r_i r_j}_{i \neq j} \right)^{1/2} \quad (23)$$

Donde,

$$\rho_{ij} = \frac{8 \xi^2 (1+a) a^{1.5}}{(1-a^2)^2 + 4 \xi^2 a (1+a)^2} \quad a = \frac{W_{nj}}{W_{ni}} \quad (24) \text{ y } (25)$$

$$\rho_{ij} = \frac{8 \sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + a \xi_j) a^{1.5}}{(1-a^2)^2 + 4 \xi_i \xi_j a (1+a^2) + 4 (\xi_i^2 + \xi_j^2) a^2} \quad (26)$$

Donde  $i$  y  $j$  corresponden al  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo modo de vibración;  $W_{ni}$ , es la frecuencia de vibración en el modo  $i$ ;  $W_{nj}$  es la frecuencia de vibración en el modo  $j$ ;  $\xi_{i,j}$  son los factores de amortiguamiento en los modos de vibración  $i$  y  $j$ .

## 4.2 Factores de amortiguamiento

Para la combinación modal vista en el sub apartado anterior, se necesita el factor de amortiguamiento de la estructura en cada modo de vibración. Los factores utilizados para los modos diferentes del primer modo de vibración se los tomo de Naoki *et al.* (2003) que se encuentran detallados en Aguiar (2012).

Se tomó el criterio de factores de amortiguamiento de Naoki *et al.* (2003), debido a su sustento práctico, y este se resume en las siguientes fórmulas:

- Para estructuras de Hormigón Armado.

$$\xi_i = 1.4 * \xi_{i-1} \quad (27)$$

- Para estructuras de acero.

$$\xi_i = (1.3 - 1.4) * \xi_{i-1} \quad (28)$$

- Para estructuras de Mixtas

$$\xi_i = (1.7 - 1.8) * \xi_{i-1} \quad (29)$$

Donde  $\xi_i$  es el factor de amortiguamiento en el modo  $i$ ;  $\xi_{i-1}$  es el modo de vibración en el modo  $i - 1$ . Para el primer modo de vibración se trabajó con el amortiguamiento intrínseco de la estructura igual a 0.05 y a partir de este valor se obtuvieron los restantes factores de amortiguamiento.

## 5 ESTRUCTURA DE HORMIGÓN ARMADO

Dos estructuras se han analizado, una de hormigón armado de 4 pisos y otra de acero de 6 pisos. En cada una de ellas se ha contemplado la colocación de dos tipos de disipadores a saber: ADAS y TADAS. De tal manera que se tienen 4 casos estudiados.

La estructura de hormigón armado, es la indicada en las figuras 13 a 15 y para explicar un poco más la forma como se obtienen las cargas incrementales que se aplican en cada modo de vibración, se indica en las tablas 4 y 5 las cargas aplicadas en (T), para el rango elástico para la estructuras con ADAS y TADAS, respectivamente.

**Tabla 4** Cargas laterales en (T), aplicadas en el rango elástico, para cada ciclo de carga. Estructura con disipadores ADAS

<b>MODOS</b> <b>PISO</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>2</b>	0.0021037	-0.0046398	0.0045037	-0.0017835
<b>3</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>4</b>	0.0062178	-0.0088846	0.0013665	0.0017452
<b>5</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>6</b>	0.0101430	-0.0040760	-0.0043755	-0.0011412
<b>7</b>	0.0131943	0.0075375	0.0019570	0.0003316

**Tabla 5** Cargas laterales en (T), aplicadas en el rango elástico para cada ciclo de carga. Estructura con disipadores TADAS

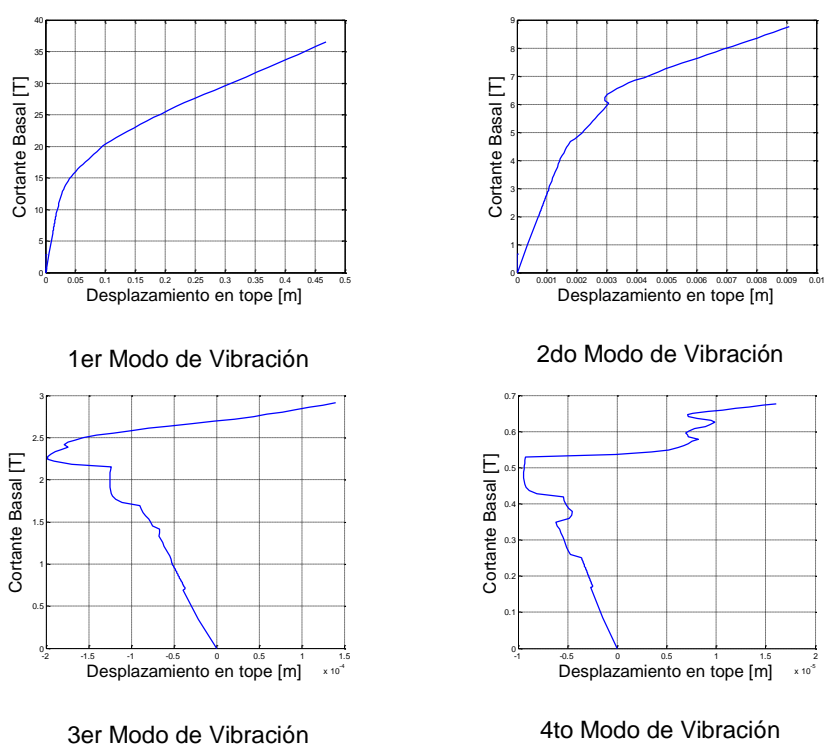
<b>MODO</b> <b>PISO</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>2</b>	0.0018888	-0.0041283	0.0039616	-0.0015908
<b>3</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>4</b>	0.0057064	-0.0082885	0.0013953	0.0015229
<b>5</b>	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
<b>6</b>	0.0094615	-0.0042100	-0.0038509	-0.0009709
<b>7</b>	0.0127411	0.0070556	0.0016158	0.0002704

En la figura 16 se presenta la curva de capacidad sísmica resistente, hallada en cada modo de vibración, de la estructura con disipadores ADAS. En la parte superior derecha se encuentra la contribución del primer modo, en ésta gráfica la escala vertical llega a 35 T; a la derecha se tiene la contribución del segundo modo, aquí la escala llega a 9 T, prácticamente 4 veces menor; en la parte inferior se indica la contribución del tercer y cuarto modo sus escalas son 1.63 T., y 0.7 T. Esto indica que en la presente estructura es el primer modo el que más aporta a la respuesta estructural.

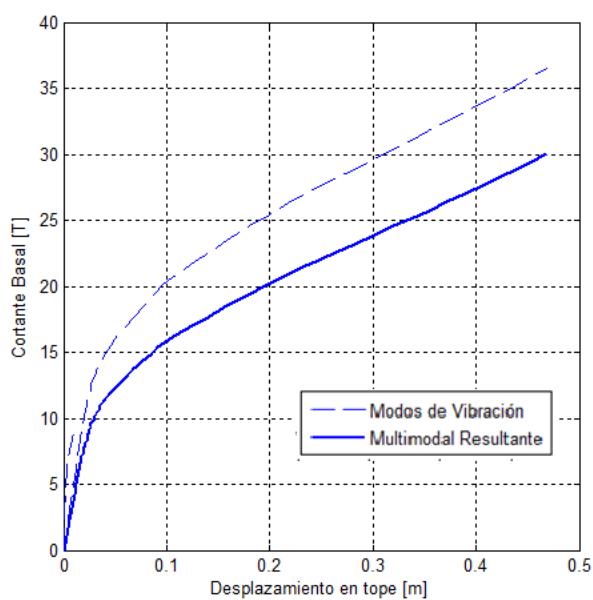
Para encontrar la curva de capacidad sísmica resistente total se aplica el criterio de combinación CQC, encontrando la gráfica que se indica en la figura 17, con línea continua.

En la figura 17, con línea entrecortada se observa, con bastante dificultad la contribución de cada uno de los modos; lo que se aprecia es la contribución del primer modo, de los restantes modos se halla en la parte inferior.

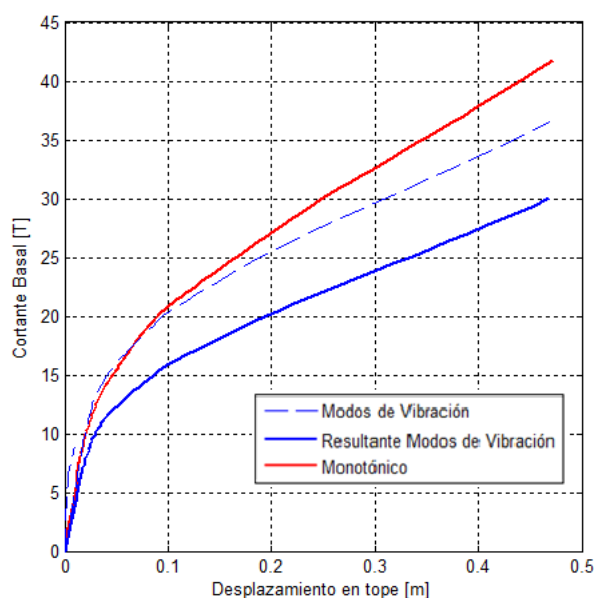
Se obtuvo la curva de capacidad sísmica, mediante un pushover monotónico, en el cual las cargas laterales se aplican proporcionalmente de acuerdo al primer modo de vibración y se encontró que la respuesta difiere de la curva que se obtiene con el pushover multimodal, como se observa en la figura 18, donde se encuentran los resultados de la figura 17 más la nueva curva de capacidad que se halla con el pushover monotónico.



**Figura 16** Curvas de Capacidad con modos de vibración de Estructura de Hormigón de 4 pisos con disipadores ADAS, con elemento disipador.



**Figura 17** Curvas de Capacidad resultante de Estructura de Hormigón de 4 pisos con disipadores ADAS, con elemento disipador



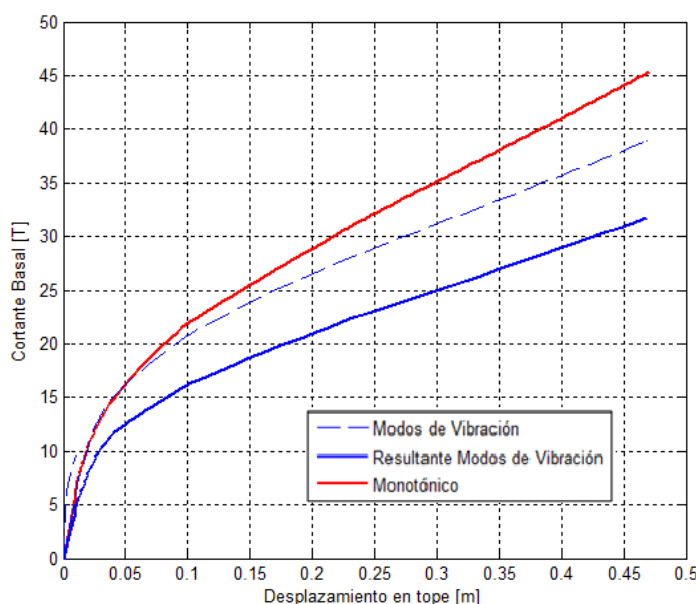
**Figura 18** Curva de capacidad sísmica encontrada en estructura de hormigón armado, de cuatro pisos con disipadores ADAS. Con dos modelos de cálculo del Pushover: Monotónico y Multimodal.

Antes de comparar las curvas de capacidad encontradas con el Pushover multimodal y el Pushover monotónico, es importante destacar que el cortante basal, que se tiene en el eje vertical de las curvas de capacidad se obtiene sumando el incremento de cortante,  $\Delta V$  que se va aplicando a la estructura y que se indicó en el apartado 4. El criterio de combinación modal CQC, se aplica en los desplazamientos, momentos y fuerzas que se obtienen en cada ciclo de carga.

En efecto para un determinado ciclo de carga, se tiene tantos estados de carga lateral que se aplican a la estructura, como modos de vibración se tengan; de tal manera que para cada iteración se tiene una respuesta en desplazamientos, fuerzas y momentos, en cada modo de vibración y es ahí cuando se aplica el CQC y se hallan la resultante.

Al cambiar los disipadores ADAS por los TADAS, se obtuvo resultados similares por lo que se omite su presentación y únicamente se presenta la figura 19, que corresponde a la curva de capacidad sísmica que se obtiene con el pushover monotónico y con el pushover multimodal. En esta gráfica también se incluye con líneas entrecortadas la contribución de cada uno de los modos; los comentarios son similares a los realizados en el párrafo anterior.





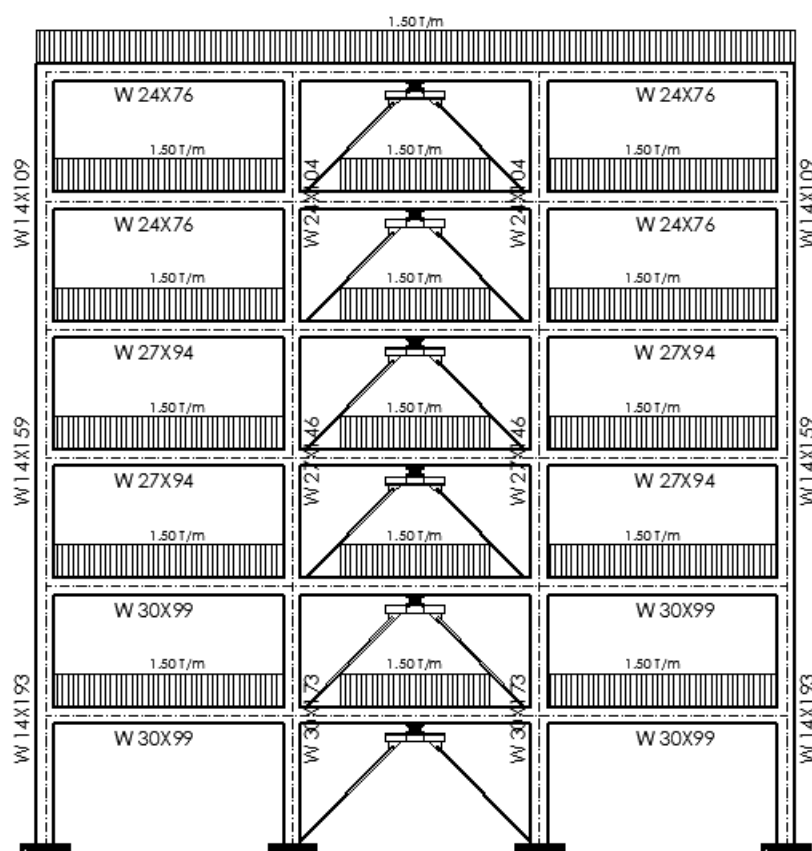
**Figura 19** Curva de capacidad sísmica encontrada en estructura de hormigón armado, de cuatro pisos, con disipadores TADAS. Empleando dos modelos de análisis: Monotónico y Multimodal.

## 6 ESTRUCTURA DE ACERO

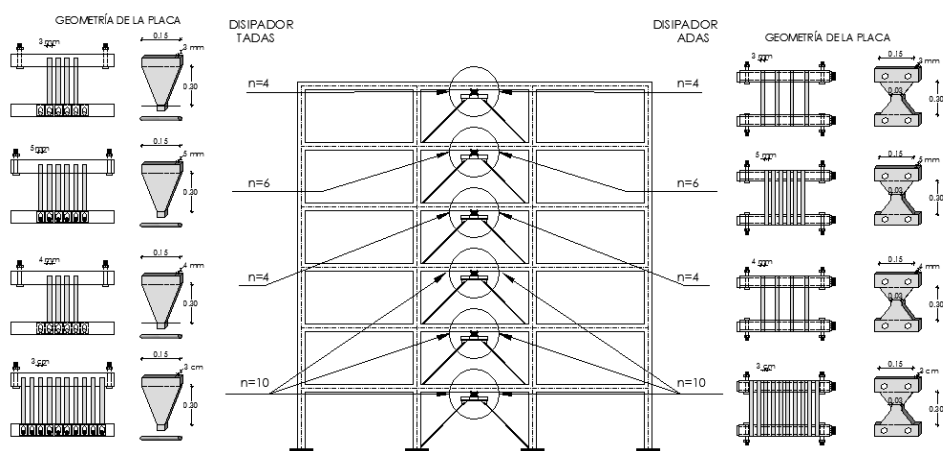
En la figura 20 se presenta la estructura de acero de 6 pisos y tres vanos, con disipadores de energía colocados en el vano central, en todos los pisos. En Aguiar *et al.* (2015, 2) se indica la forma como se halla el diagrama momento rotación de estos perfiles utilizando las recomendaciones del ASCE 41 de 2011 y posteriormente como se pasa al diagrama momento curvatura en función de la longitud plástica. Por cierto, en los programas que obtienen el diagrama momento curvatura, indicados en la tabla 3, para el rango elástico solo encuentran el momento de fluencia y curvatura de fluencia; cuando ingresan al rango no lineal ahí empiezan a calcular el punto U, con los coeficientes del ASCE 41.

En la figura 21 se indica a la izquierda los disipadores de energía tipo TADAS y a la derecha los ADAS. De tal manera que se analizaron dos casos con cada uno de estos disipadores.

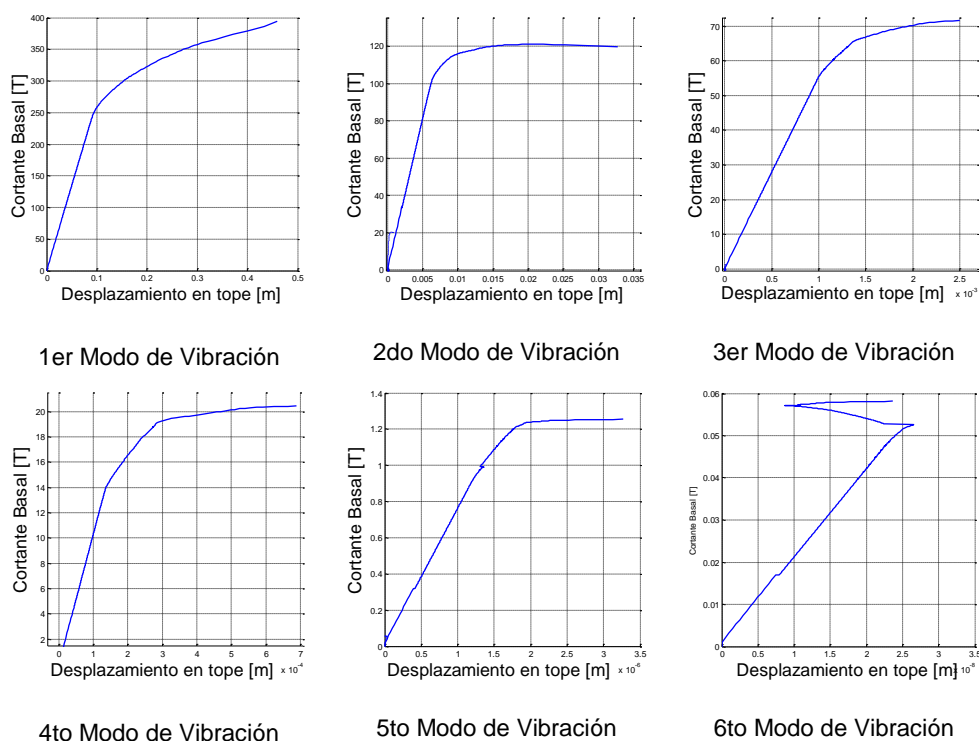
En la figura 22 se presentan las curvas de capacidad sísmica, encontradas en cada uno de los modos de vibración, en la estructura con disipadores ADAS. En la parte superior se hallan las curvas para los tres primeros modos de vibración y en la parte inferior para tres últimos modos. Para el primer modo, la escala vertical que indica el cortante basal llega hasta las 400 T (curva de capacidad) en cambio para el segundo hasta las 120 T y en el tercer modo el cortante es del orden de las 70 T. De tal manera que el primer modo es fundamental en la respuesta de la estructura, en este caso en la curva de capacidad sísmica resistente.



**Figura 20** Estructura de acero con disipadores de energía colocados sobre diagonales en forma de "V" invertida.



**Figura 21** Geometría de los disipadores de energía ADAS, a la izquierda y TADAS a la derecha.



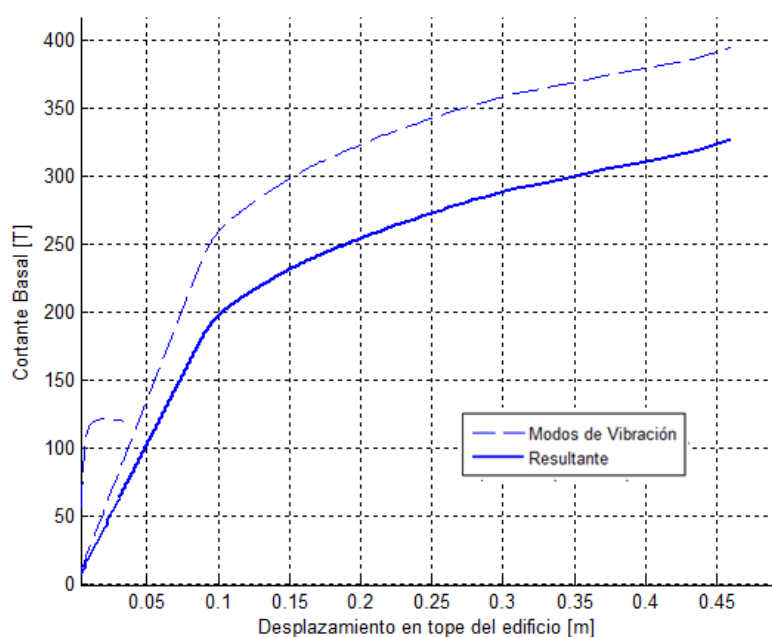
**Figura 22** Curvas de Capacidad con modos de vibración de Estructura de Acero de 6 pisos con disipadores ADAS, con elemento disipador.

La escala vertical, para el cortante basal del cuarto modo llega a 20 T., del quinto a 1.4 T y del sexto a 0.06 T. En las figuras se está indicando con *elemento disipador*, esto significa que el disipador de energía fue modelado como un elemento más de la estructura, en contraste con el modelo de la diagonal equivalente en el cual la diagonal de acero y el disipador se modelan como una sola diagonal equivalente.

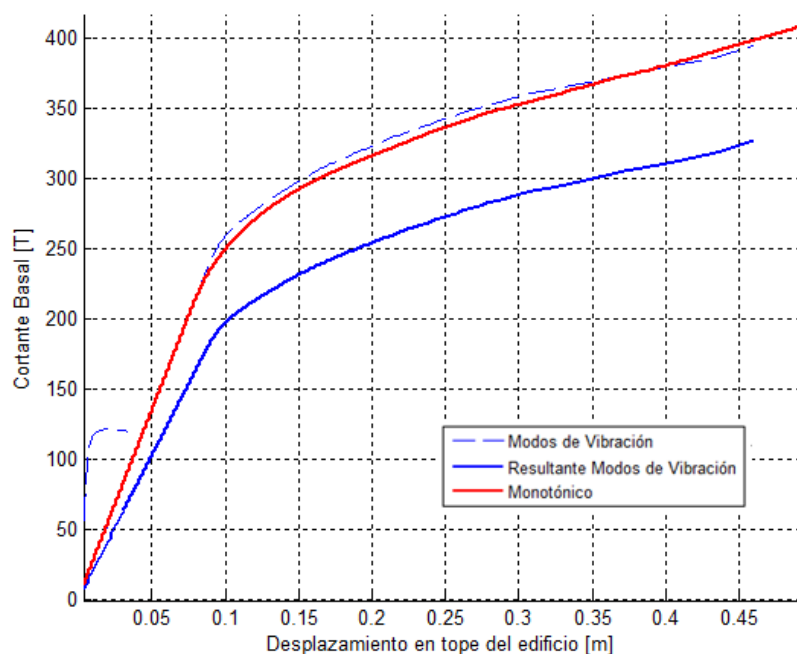
En la figura 23 se presenta con línea entrecortada, la contribución de cada uno de los modos y con línea continua la resultante que se obtiene al aplicar el criterio de combinación modal CQC. En este caso se observa que la resultante se aleja de la curva del primer modo y que tiene valores muy inferiores para desplazamientos altos.

En la figura 24 se compara las curvas de capacidad sísmica que se hallan con dos modelos numéricos de cálculo del Pushover, el uno el monotónico que trabaja solo con el primer modo de vibración y el segundo el multimodal considerando todos los modos de vibración. En esta gráfica se nota una mejor coincidencia de la curva de capacidad hallada con el modelo monotónico, con la curva que se encuentra en el primer modo de vibración.

Otro aspecto interesante de la figura 24 es que las curvas que se encuentran con los dos modelos: monotónico y multimodal, son bastante diferentes.

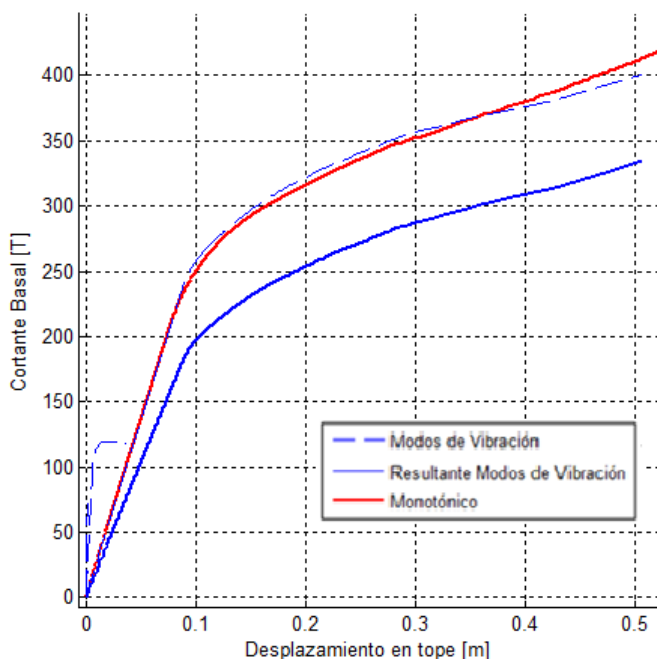


**Figura 23** Curvas de capacidad sísmica resultante de Estructura de Acero de 6 pisos con disipadores ADAS, con elemento disipador. Con línea entrecortada se indica la contribución de cada modo y con continua la resultante.



**Figura 24** Curvas de Capacidad Modal y Monotónica de Estructura de Acero de 6 pisos con disipadores ADAS, con elemento disipador y contribución de cada modo de vibración.

Nuevamente cuando se cambia de disipador de ADAS a TADAS, el comportamiento que se observa es muy similar, razón por la cual solo se presenta la curva de capacidad sísmica que se halla con los dos modelos: monotónico y multimodal, en la figura 25. Se observa una muy buena aproximación en los resultados hallados con estos dos modelos.



**Figura 25** Curvas de capacidad sísmica resistente, con dos modelos numéricos de cálculo: Modal y Monotónica, de una estructura de acero de 6 pisos con disipadores TADAS, considerando elemento disipador.

## 7 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se ha presentado con bastante detalle, la forma de cálculo de la curva de capacidad sísmica resistente de una estructura empleando la técnica denominada Pushover Multimodal. A sabiendas de que existen muchas publicaciones al respecto, pero una buena parte de ellas se limitan a utilizar determinados programas de ordenador y en otras la explicación es bastante general. Se aspira con esta publicación haber ilustrado el cálculo del Pushover empleando todos los modos de vibración para aplicar las cargas laterales y aplicando el criterio de la combinación cuadrática completa CQC en los desplazamientos, fuerzas y momentos que se generan en cada ciclo de carga.

Por otra parte se ha encontrado la curva de capacidad sísmica resistente en una estructura con disipadores de energía ADAS o TADAS, los mismos que se hallan sobre contravientos Chevron. Los disipadores han sido modelados como un elemento más de la estructura y la matriz de rigidez fue obtenida considerando cinco dovelas en el disipador. En los restantes elementos también se obtuvo la

matriz de rigidez en coordenadas globales considerando tres dovelas. De tal manera que en las columnas y vigas se está trabajando con un modelo de plasticidad que toma en cuenta la longitud del elemento que ingresa al rango no lineal.

Los resultados encontrados del análisis Pushover Multimodal han sido comparados con los que se obtienen con el Pushover Monotónico, encontrando una buena aproximación, debido a que la estructura es simétrica en elevación.

Finalmente todos los programas que se han desarrollado han sido incorporados al sistema de computación **CEINCI-LAB**.

## REFERENCIAS

1. Aguiar, R., Rodríguez M., Mora D., (2015,1), *Análisis sísmico de estructuras con disipadores ADAS o TADAS*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Monografías de Ingeniería Sísmica, **IS-72**, Universidad Politécnica de Cataluña.
2. Aguiar R., Mora D., Morales E., (2015,3), "Peligrosidad sísmica de Quito y el método del espectro de capacidad", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, **20 (1)**, 1-39.
3. Aguiar Roberto, (2014), *Análisis Matricial de Estructuras con CEINCI-LAB*, Cuarta Edición. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, IPGH, Ecuador, 676 p., Quito.
4. Aguiar Roberto, (2012), *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB*, Instituto Panamericano de Geografía e Historia, IPGH. Segunda edición, 416 p., Quito.
5. Aguiar Roberto, (2003), *Análisis sísmico por desempeño*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 342 p., Quito.
6. Aguiar R., (2002) *Sistema de computación CEINCI3 para evaluar daño sísmico en los Países Bolivarianos*, Centro de Investigaciones Científicas. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, 302 p.
7. ASCE 41 (2011) *Seismic rehabilitation of existing buildings*, American Society of Civil Engineers ASCE/SEI 41-11.
8. Chopra A., and Goel R., (1999), *Capacity-demand-diagram methods for estimating deformation of inelastic structures: SDF systems*, Pacific Earthquake Engineering Research Center, Rep **PEER-1999/02**, University of California, Berkeley, California.
9. Chopra, A. K. (2014), *Dynamic of Structures Theory and application to earthquake engineering*. 4<sup>th</sup> edition
10. Chopra A. K. (2001), *Dynamic of structures: Theory and aplicaciones to earthquake engineering*, 2<sup>nd</sup> edn. Prentice Hall: Saddle River New York.
11. Chopra, A. K. y R. K. Goel (2001), "A modal pushover analysis procedure to estimate seismic demands for buildings: Theory and preliminary evaluation", *Reporte No. PEER 2001-03*, Pacific Earthquake Engineering Research Center.

12. Chopra, A. K. y R. K. Goel (2002), "A modal pushover analysis for estimating seismic demands of buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 31, pp. 561-582.
13. Freeman S. A., Nicoletti J. P., and Tyrell J. V., (1975), "Evaluation of existing buildings for seismic risk. A model study of Puget Sound Naval Shipyard, Bremerton, Washington", *Proceedings of the 6<sup>th</sup> U. S. National Conference on Earthquake Engineering*, Seattle.
14. Freeman S. A., (1978), *Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake motion*, American Concrete Institute, **SP-55**, 585-605, Detroit.
15. Heresi Pablo (2012), Comportamiento de placas de CuZnAl para disipadores tipo ADAS. Tesis de Maestría. Universidad de Chile, 141 p.
16. Mora D., Aguiar R., (2015,2), *Diagrama momento-curvatura y momento-rotación para elementos de hormigón armado y acero con ASCE/SEI 41 y sistema de computación CEINCI-LAB*, Revista Ciencia, **17**, **2**, 191-221.
17. Naoki Satake, Ken-ichi Suda, Toshiharu Arakawa, Atsushi Sasaki, and Yukio Tamura, (2003), "Damping evaluation using full-scale data of buildings in Japan", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 470-477.
18. Tena, A. (1997), "Mathematical modelling of the ADAS energy dissipation device", *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 10, pp. 811-821.
19. Tsai K-C., Chen H-W., Hong C-P. y Su Y-F, (1993), "Design of steel triangular plate energy absorbers for seismic-resistant construction", *Earthquake Spectra*, **9** (**3**), 505-528.
20. Vielma J.C., (2014) *Contribuciones a la evaluación de la vulnerabilidad sísmica de edificios*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Monografía de Ingeniería sísmica **IS-68**, 186 p.
21. Vielma J. C., Cando M., (2014), "Implementación del FEMA P695 en la evaluación de las estructuras metálicas del Ecuador", *Revista Ciencia*, **16** (**2**), 209-236.
22. Wilson, Edward L. (2002). *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*.
23. Wittaker A.S., Bertero V., Alonso L., and Thompson C., (1989), *Earthquake simulator testing of steel plate added damping and stiffness elements*, Report UCB/EERC-89/02. Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.